BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* **2010**

MEXANİKA

О ФЛАТТЕРЕ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

М.А.НАДЖАФОВ
Азербайджанский Государственный Педагогический Университет
b najafov @ rambler.ru

В предлагаемой работе приводится уточненная формулировка задачи флаттера, круговой конической оболочки основанная на новых выражениях для параметров основного состояния оболочки. Эта формулировка рассчитана, в соответствии, с безмоментной теорией оболочек.

Сверхзвуковой панельный флаттер конической оболочки при внутреннем обтекании изучался в работах [1-3]. При математической формулировке задачи были приняты упрощающие предположения: для давления аэродинамического взаимодействия использована формула «поршневой» теории, в [2] для параметров невозмущенного потока принята линейная аппроксимация, в [3] они заменены средними значениями по потоку. В публикациях [4-8] дана новая постановка задачи: давление аэродинамического взаимодействия определено по результатам работы [9], параметры невозмущенного потока определены по уравнениям газовой динамики для одномерного движения [10].В данной работе, в развитие результатов [4-8], приводится уточненная формулировка задачи флаттера; она основана на новых выражениях для параметров основного состояния оболочки, рассчитанных, в соответствии с [3], по безмоментной теории оболочек.

Рассмотрим круговую коническую оболочку, которая в сферической системе координат $\{r,\theta,\varphi\}$ занимает часть $r_1 \le r \le r_2$ конической поверхности $\{0 \le r < \infty;\ \theta = \alpha;\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$. Угол α считаем достаточно малым, так что $\alpha^2 << 1$. В положительном направлении оси r протекает газ; невозмущенное течение считаем радиальным стационарным, его параметры-скорость $u_0(r)$, плотность $\rho_0(r)$, давление $p_0(r)$, местная скорость звука $a_0(r)$ -известные функции радиуса. Течение сверхзвуковое, принимается $M^2 = \dfrac{\vartheta_0^2}{a_0^2} >> 1$. При малой конусности $\alpha^2 << 1$ координату r можно отождествить с координатой x, которая отсчитывается от вершины конуса и направлена по его оси.

Оболочка предполагается упругой, ее механические характеристики: E-модул Юнга, γ - коэффициент Пуассона, ρ -плотность, h -толщина; цилиндрическая жесткость $D = Eh^3/\left(12(1-\nu^2)\right)$.

Колебания оболочки описываются уравнениями технической теории $[11]$:

$$D\Delta^2 w - \frac{1}{xtg\alpha}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - L(w,F) = \Delta p - \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad , \tag{1}$$

$$\Delta^2 F + \frac{Eh}{xtg\alpha}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2}L(w,w) = 0 \ , \tag{2}$$

здесь p -давление аэродинамического взаимодействия, w, F -прогиб и функция усилий в срединной поверхности; оператор L имеет вид :

$$L(u,\mathrm{v}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\psi^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}\right) -$$

$$-2\left(\frac{1}{x}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial\psi} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial v}{\partial\psi}\right)\left(\frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\psi} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial\psi}\right);\ \psi = \sin\alpha \ .$$

Решение системы (1), (2) ищется в рамках метода возмущений, в форме суммы основного (квазистатического) и возмущенного (динамического) состояний: $\mathrm{w} = \mathrm{w}_0(x,\varphi) + w_1(x,\varphi,t)$, $F = F_0(x,\varphi) + F_1(x,\varphi,t)$, при этом $\mathrm{p} = \mathrm{p}_0(x) + \Delta p_1$. Внесем это в систему (1), (2), линеаризуем по возмущениям и сделаем упрощения; получим в результате для возмущенного состояния

$$D\Delta^2 w_1 - \frac{1}{xtg\alpha}\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} - L(w_1,F_0) = \Delta p_1 - \rho h\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \quad , \tag{3}$$

$$\Delta^2 F_1 + \frac{Eh}{xtg\alpha}\cdot\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0 ; \tag{4}$$

параметры невозмущенного потока определяются по теории одномерного течения $[10]$:

$$p_0(x) = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{p_{kp}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \quad , \tag{5}$$

$$a_0(x) = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{1/2} \frac{a_{kp}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{1/2}} \quad , \tag{6}$$

здесь γ - показатель политропы, $u_0(x) = a_0(x)M(x)$. Основной является зависимость между числом Маха $M(x)$ и координатой x :

$$\frac{x^2}{x_{kp}^2}=\frac{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{k_1}}{\left((k+1)/2\right)^{k_1}M},\quad k_1=\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}\ . \tag{7}$$

При больших сверхзвуковых скоростях $(\gamma-1)M^2>>2$, поэтому из (7) с хорошей точностью получим

$$\frac{x}{x_{kp}}=\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{k_1\ 2}M^{\frac{1}{\gamma-1}}\ . \tag{8}$$

Усилия в срединной поверхности T_1,T_2 вычисляются по известным формулам [11]:

$$T_1=-\frac{tg\alpha}{x}\int\limits_x^{x_2}p_0(x)x\,dx;\ \ T_2=p_0(x)x\,tg\alpha\ . \tag{9}$$

Подставив сюда (5), с учетом (8) получим:

$$T_1=-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{\gamma/2}\frac{p_{kp}tg\alpha}{2(\gamma-1)}\frac{x_{kp}^{\frac{2}{\gamma}}}{x_2^{\frac{2}{\gamma-1}}}\left[\left(\frac{x_2}{x}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}}-\frac{x_2}{x}\right]\ , \tag{10}$$

$$T_2=\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{\gamma/2}xp_{kp}tg\alpha\left(\frac{x_{kp}}{x}\right)^{2/\gamma}. \tag{11}$$

Обозначим q-среднее значение $p_0(x)$ в приближении (8); из (9), соответственно, получим

$$T_1^0=-\frac{qtg\,\alpha}{2}\frac{x_2^2-x^2}{x};\qquad T_2^{(0)}=qxtg\alpha\,.$$

Графики функций $T_2(x)$ и $T_1^0(x)$ различаются незначительно, однако поведения $T_2(x)$ и $T_1^0(x)$ принципиально различны: $T_2(x)$ убывает обратно пропорционально $x^{2\gamma-1}$, $T_1^0(x)$ возрастает пропорционально x. Следовательно, замена $p_0(x)$ его средним значением, как это сделало в [3], требует дополнительного обоснования. Отметим, что сказанное справедливо для случая $\alpha^2<<1$, $(\gamma-1)M^2>>1$.

Обратимся к системе (3), (4). Положим $x/l=(x_1+y_2)/l\equiv x_0+y$, $0\le y\le 1$, $l=x_2-x_1$; $W_1=w_1/l$, $\Phi_1=F_1/\left(Eh^2l\right)$; учтем еще, что $\partial F_0/(x\partial x)=T_1$, $\partial^2F_0/\left(x\partial x^2\right)=T_2$. Подставив в (3), (4), с учетом (10), (11), получим (осесимметричное состояние):

$$\Delta^2\Phi_1+\frac{1}{tg\alpha(x_0+y)}\ \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2}=0\ , \tag{12}$$

$$-\frac{A_0 h}{l(x_0+y)}W_1' = \Delta p_1 + \rho h\frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2}, \tag{13}$$

$$A_0 = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{\gamma/2} p_{kp} tg\alpha\, x_{kp}^{2\gamma} \ ,$$

здесь за безразмерной координатой x_{kp} оставлено прежнее обозначение.

В дальнейшем принимаем $W_1 = W\exp(wt)$, $\Phi_1 = \Phi\exp(wt)$, $\Delta p_1 = \Delta p\exp(wt)$.

Для избыточного давления Δp примем выражение из [9] без учета интегрального слагаемого:

$$\Delta p = -\frac{\gamma p_0}{l}\left[\Omega_0 W + M\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{1}{2\xi_0(y)}W - \frac{\partial u_0}{\partial y}\frac{1}{a_0(y)}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)W\right],$$

$$\xi_0 = (x_0+y)tg\,\alpha \ , \tag{14}$$

здесь обозначено $\Omega_0(y) = lw/a_0(y)$.

С учетом (6) и определения $u_0 = Ma_0$ вычислим в приближении (8) (учтем $x = x_0 + y$)

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial M}\frac{\partial M}{\partial y} = \left(a_0 + M\frac{\partial a_0}{\partial y}\right)\frac{\partial M}{\partial y} \ .$$

Подставим это в (14), а затем в (13), окончательно получим :

$$\Delta^2 W - \frac{B_0}{x_0+y}\Phi'' + \frac{B_1}{2(\gamma-1)(x_0+1)}\left[\left(\frac{x_0+1}{x_0+y}\right)^{2\gamma-1} + \frac{x_0+1}{x_0+y}\right]W'' -$$

$$\frac{B_1}{(x_0+y)^{2\gamma-1}}W' + \frac{A_1 x_{kp}^{2k_3}}{M^{\varepsilon}(x_0+y)^{2k_3}}W' + \frac{A_1 x_{kp}^{2k_3}}{2tg\alpha\, M^{k_3}(x_0+y)^{k_5}}W -$$

$$-\frac{A_1(\gamma+1)^{k_6} x_{kp}^2}{M^2(x_0+y)^3}W + \frac{A_1 x_{kp}}{M(x_0+y)^2}\Omega W + B_2\Omega^2 W = 0. \tag{15}$$

Уравнение (12) запишется в виде

$$\Delta^2\Phi + \frac{1}{tg\alpha\,(x_0+y)}W'' = 0. \tag{16}$$

В (15) введены обозначения

$$B_0 = \frac{12(1-\nu^2)l^2}{h^2}\ , \qquad B_1 = \frac{12\,(1-\nu^2)l^3 A_0}{Eh^3}\ , \qquad \Omega = \frac{lw}{a_{kp}},$$

$$B_2 = \frac{12(1-\nu^2)l^2 a_{kp}^2}{h^2 c^2}, \quad c^2 = E/\rho\ ;\ \varepsilon = \frac{\gamma-1}{\gamma+1},$$

$$A_1 = \frac{12(1-v^2)\gamma\, p_{kp} l^3}{E h^3},\quad k_3 = \frac{2\gamma}{\gamma+1},\quad k_5 = \frac{3\gamma+1}{2(\gamma-1)},\quad k_6 = \frac{2\gamma-1}{2(\gamma-1)}.$$

В уравнении (15) удобно ввести значение числа Маха на левом торце оболочки: $M_0 = M(x_0)$; в приближении (8) получим

$$M = M_0\left(1+\frac{y}{x_0}\right)^{\gamma-1}.$$

Если подставить это в то обнаружим, что при заданных других параметрах решение системы (15), (16) будет зависеть от M_0 и Ω.

Вместе с однородными граничными условиями формы Навье, [12] система (15), (16) составляет задачу на собственные значения. Колебания оболочки устойчивы, если $\mathrm{Re}\,\Omega < 0$, неустойчивы, если $\mathrm{Re}\,\Omega > 0$. Задача панельного флаттера теперь формулируется следующим образом: определить наименьшее значение «скорости» M_0, при котором одно из собственных значений станет чисто мнимым, а все остальные будут лежать в левой полуплоскости комплексной плоскости Ω. Это значение «скорости» считается, по определению, критической скоростью флаттера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Диткин В.В., Орлов В.А., Пшеничнов Г.И., Сергиенко А.А.. О флаттере конических оболочек // Численные методы в механике деформируемого твердого тела. М.: 1987, с. 3-14.
2. Диткин В.В., Орлов В.А., Пшеничнов Г.И. Численное исследование флаттера конических оболочек // М.: Изв. РАН, МТТ, 1993, № 1, с. 185-189.
3. Александров В.М., Гришин С.А. Динамика конической оболочки при внутреннем сверхзвуковом потоке газа // Прикл.матем. и мех., 1994, т.58, в.4, с.123-132.
4. Najafov M.A. Formulation of the connic cover flatter problem. Perturbed state// National academy of sciences of azerbaijan proceedings of institute of mathematics and mechanics Baku: 2005, v. 22 (30), p. 163-166.
5. Najafov M.A. Stament of a conical shell flatter problem // National academy of sciences of Azerbaydjan proceedings of institute of mathematics and mechanics. Baku, 2006, v. 24 (32), p. 211-216,.
6. Najafov M.A. Aeroelastic vibrations and stability of a conical shell streamlined by gas flow with high supersonic speed// Transactions of nas of Azerbajdjan. Swries of physical-technical and matematical sciences. Baku, 2006, v. 26, №4, p.195-202, .
7. Najafov M.A. Geometrically nonlinear aeroelastic vibrations and stability of a cylindrical shell // Transactions of nas of Azerbaijan. Series of physical-technical and matematical sciences. Baku, 2006, v. 26, №7, p. 145-148.
8. Najafov M.A. Vibration and stability of a conic shell flitter in supersonic gas flow // Transactions of nas of Azerbaijan. Series of physical-technical and matematical sciences. Baku, 2007, v. 26, №1, p.165-172.
9. Кийко И.А. Постановка задачи об аэроупругих колебаниях конической оболочки малого раствора, внутри которой со сверхзвуковой скоростью протекает газ // Вестн. Моск. Уни-та, сер 1, Математика, Механика, 2004, №3, с.58-61.
10. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, Физматлит, 1969, 185 с .
11. Григолюк Э.И, Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М .: Наука, 1978, 359 с.
12. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек М.: Наука, Физматлит, 1995, 308 с.

KONİK ÖRTÜKLÜ FLATTER HAQQINDA

M.A.NƏCƏFOV

XÜLASƏ

Konik örtüklü panelli flatterin riyazi qoyuluşuna aid ilk işlərdə bəzi sadələşdirmələr qəbul olunurdu. Daha doğrusu, aerodinamiki qarşılıqlı təsirin təzyiqi üçün porşen nəzəriyyəsinin düsturlarından istifadə olunurdu, həyəcanlanmamış selin parametrləri üçün xətti approksimasiya qəbul olunurdu və ya onlar sel üzrə orta qiymətlə əvəz olunurdu. Sonra bəzi işlərdə aerodinamiki qarşılıqlı təsirin təzyiqi və həyəcanlanmamış selin parametrləri üçün son zamanlar alınmış nəticələr əsasında məsələnin yeni qoyuluşu verilib.

Təqdim olunan işdə örtüyün əsas vəziyyətinin parametrlərinin yeni ifadələri əsasında məsələnin dəqiqləşdirilmiş qoyuluşu verilir.

ON THE CONIC SHELL FLATTER

M.A.NAJAFOV

SUMMARY

In the mathematical formulation of panel conic shell flatter, in the first papers there were adopted simplifying assumptions, namely, piston theory formula was used for aerodynamic interaction pressure, linear approximation was accepted for unperturbed flow parameters, or they were replaced by averaged value in flow . Further, a new statement of the problem is given in some papers, in which aerodynamic interaction pressure and unperturbed flow parameters are defined on the base of the recently obtained results.

In this paper we give revised statement of the flatter problem on the base of expressions of new parameters of the main state of a cone.